דוגמה

קבע האם המישורים מקבילים?

$$\begin{array}{ll} I. & 3x-4y+5z=0 \\ II. & -6x+8y-10z-4=0 \end{array}$$

פתרון

משיקולים גאומטריים: מישורים מקבילים $\Leftrightarrow$ הנורמלים שלהם מקבילים. עבור I ברור שהנורמל הוא $(3,-4,5)$. עבור II ברור שהנורמל הוא $(-6,8,-10)$. הוקטורים תלויים לינארית $\Leftrightarrow$ המישורים מקבילים

המשך טורי טיילור

תזכורת $$P_r(\vec{x}) = \sum_{i=0}^{r} \frac{1}{i!} d^i f_{p_0}(\vec{x}-p_0)$$

דוגמה 1

חשבו טור טיילור מסדר 3 עבור הפונקציה $f(x,y) = e^x \sin y$

פתרון

נשתמש בטורים ידועים. תזכורת של טורים ידועים:

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

במקרה שלנו נכפיל את הטור של $\sin$ בטור של e ונקבל

$$e^x \cdot \sin y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot y^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ההצגה הזו אינה של טור טיילור.

עבור סדר 3 נחפש מתי סכום החזקות של x וy הוא 3.

$$e^x \sin y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}\right) \cdot \left(1 + y - \frac{y^3}{3!} - ...\right)$$

נבחר רק דרגה קטנה מ3

$$1\left(y - \frac{y^3}{3!}\right) + x \cdot y + \frac{x^2}{2!} \cdot y = \boxed{y - \frac{y^3}{6} + x \cdot y + \frac{x^2 y}{2} = P_3(x, y)}$$

(לא נוסיף $\frac{x \cdot y^3}{3}$ כי הדרגה היא 4 וביקשו עד דרגה 3)

דוגמה 2

חשבו טיילור מסדר 2 לפונקציה $f(x, y) = x^y$ סביב הנקודה $(1, 1)$.

פתרון

נפתח טור טיילור לפי הגדרה

$$f(1, 1) = 1$$

$$f'_x = y \cdot x^{y-1} \Rightarrow f'_x(1, 1) = 1$$

$$f'_y = x^y \ln x \Rightarrow f'_y(1, 1) = 0$$

$$f''_{xx} = y \cdot (y - 1) \cdot x^{y-2} \Rightarrow f''_{xx}(1, 1) = 0$$

$$f''_{yy} = x^y \ln^2 x \Rightarrow f''_{yy}(1, 1) = 0$$

$$f''_{yx} = yx^{y-1} \ln x + \frac{x^y}{x} \Rightarrow f''_{yx}(1, 1) = 1$$

$$f''_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1} \cdot \ln x \Rightarrow f''_{xy}(1, 1) = 1$$

(תזכורת: ראינו שיעור שעבר שאם $f \in C^n$ אז סדר הגזירה החלקית לא משנה עד סדר n)
נציב בנוסחת טיילור

$$\boxed{P_2 = f(1, 1) + f'_x(1, 1)(x - 1) + f'_y(1, 1)(y - 1) + \frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(1, 1)(x - 1)^2 + 2f''_{xy}(1, 1)(x - 1)(y - 1) + f''_{yy}\right.}$$

$$\boxed{P_2(x, y) = 1 + (x - 1) + (x - 1)(y - 1)}$$

זו התשובה <u>ואסור</u> לפתוח סוגריים - זהו הפיתוח של טור טיילור.

משפט(תנאי מספיק למינימום מקומי)

תהי f פונקציה ממשית ממח' C^2 בסביבה של נקודה קריטית x^0, ונניח ש $H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)$ מוגדרת חיובית בנק. x^0.]דהיינו: כל המינורים M_i $(i = 1, ...k)$ של $H\left(x^0\right)$ חיוביים.
אזי: הנק. x^0 היא נקודת מינימום מקומית של f.

הוכחה

נרשום את נוסחת טיילור עבור f בנק. x^0(אפשרי כי f היא ממח' C^2) עם $n = 1$.

$$f\left(x^0 + h\right) = f\left(x^0\right) + \left(h \cdot \nabla\right) f|_{x^0} + \frac{1}{2!}\left(h \cdot \nabla\right)^2 f\Big|_{x^0+\theta h}$$

עבור h, $0 < \theta < 1$ מתאימים. ולכן:

$$f\left(x^0 + h\right) - f\left(x^0\right) = \frac{1}{2}(h \cdot \nabla)^2 f\left(x^0 + \theta h\right)$$

$$h\nabla = \sum_{i=1}^{k} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$(h\nabla)^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{k} h_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{i,j=1}^{k} h_i h_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$(h\nabla)^2 f\Big|_x = \sum_{i,j=1}^{k} h_i h_j \cdot \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_x}_{H_{ij}(x)} = h\, H|_x\, h^t$$

H_{ij} פונקציה רציפה בסביבה של x^0(כי f ממח' C^2 בסביבה של x^0).

דוגמה 3

פתחו את הטור טיילור של הפונקציה $f(x, y) = \frac{x}{y}$ סביב הנק. $(1, 1)$.

פתרון

נכתוב את f באופן הבא:

$$f(x, y) = \frac{x - 1 + 1}{y - 1 + 1} = \frac{x - 1}{1 + (y - 1)} + \frac{1}{1 + (y - 1)} = (x - 1) \cdot \frac{1}{1 + (y - 1)} + \frac{1}{1 + (y - 1)}$$

תזכורת טור הנדסי: $\boxed{\frac{1}{1-q}=\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}}$

ובמקרה הכללי: $\sum_{i=1}^{n}q^{i-1}=\frac{1-q^n}{1-q}$

נסמן $\frac{1}{1+(y-1)} = \frac{1}{1-(-(y-1))} = \sum_{n=0}^{\infty}(-(y-1))^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(y-1)^n$
ונחזור למשוואה

$$f(x,y)=(x-1)\cdot\frac{1}{1+(y-1)}+\frac{1}{1+(y-1)}=(x-1)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(y-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(y-1)^n$$

$$\boxed{f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(y-1)^n((x-1)+1)}$$

אנחנו בעצם רוצים הצגה של $(x-a)$ ו$(y-b)$ עבור הנק. (a,b)

דוגמה 4

מצא טור טיילור סביב הנק. $(0,0)$ כאשר $f(x,y)=\frac{x}{1+y^2}$

פתרון

נכתוב $f(x,y)=x\cdot\frac{1}{1+y^2}=(x-0)\cdot\frac{1}{1+y^2}$. נמצא טור מתאים לביטוי $\frac{1}{1+y^2}$.
נעזר בתכונות טור הנדסי $\frac{1}{1-(-y^2)}$. ברור שהטור מתכנס עבור $\left|-y^2\right|<1$ ו$(0,0)$ האי הסביבה שלנו אז זה בסדר.

$$\frac{1}{1-(-y^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-y^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot y^{2n}$$

ולכן

$$f(x,y)=x\cdot\frac{1}{1+y^2}=x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y^{2n}\qquad(*)$$

תזכורת: במקרה זה ניתן להגדיר בקלות טור טיילור מהצורה $(x-0)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(y-0)^k$
עבור $k=2n$. $k=2n$ יקבל את הטור עצמו, $k\neq 2n$ יקבל 0.

דוגמה 5

מצאו טור טיילור מסדר 8 לפונקציה $f(x,y)=\dfrac{1}{1-x^2y}$ סביב $(0,0)$ ומצאו בעזרתו את $\dfrac{\partial^6 f}{\partial x^4\partial y^2}$

פתרון

טור הנדסי: $\left|x^2y\right|<1$ והרי צריך סביב הנק. $(0,0)$.

$$\frac{1}{1-x^2y}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^2y\right)^n$$

$$P_8(x,y)=1+x^2y+x^4y^2$$

לא לקחנו יותר כי הבא הוא x^8y^4 וזה 12 וצריך עד סדר 8.
מיחידות טור טיילור נובע כי

$$\frac{1}{6!}\cdot\frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot\frac{\partial^6 f}{\partial x^4\partial y^2}$$

ונקבל

$$\frac{1}{4!2!}\cdot\frac{\partial^6 f}{\partial x^4\partial y^2}=1$$

מכיוון שהמקדם של x^4y^2 הוא 1. ולכן $\dfrac{\partial^6 f}{\partial x^4\partial y^2}=4!\cdot 2!=48$

נק. מינימום ומקסימום

דוגמה 1

מצא את כל נקודות הקיצון המקומיות עבור $f(x,y)=3x^2-2xy+y^2-8y$

פתרון

נמצא נגזרות חלקיות

$$f'_x(x,y)=6x-2y$$

$$f'_y(x,y)=-2x+2y-8$$

ברור שקיימת נקודה חשודה כנק. קיצון אם $f'_x=0\wedge f'_y=0$

$$\begin{cases}6x-2y=0\\-2x+2y-8=0\end{cases}$$

$$4x - 8 = 0 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

$$6 \cdot 2 - 2y = 0 \Rightarrow \boxed{y = 6}$$

הנק. קיצון הזו $(2,6)$, אם היא אכן קיצון היא רק מקומית כי זה פולינום ששואף לאינסוף.
כאשר נציב $f(2,6) = 3 \cdot 4 - 24 + 26 - 48 = -24$ זו נק. מינימום כי שואפים ל∞

משפט

אם לf קיצון מקומי ב(x_0, y_0)והנגזרות החלקיות מסדר ראשון של f קיימות אזי $f'_x(x_0, y_0) = 0 \wedge f'_y(x_0, y_0) = 0$